

基于投影变换的 Sweep 曲面构造方法

汪国平^{1),2)} 吴学礼³⁾ 林立新⁴⁾ 董士海^{1),2)}

¹⁾(中国科学院计算技术研究所智能信息处理重点实验室, 北京 100080)

²⁾(北京大学计算机科学技术系, 北京 100871) ³⁾(河北科技大学电气信息学院, 石家庄 050001)

⁴⁾(河北科技大学设备处, 石家庄 050061)

摘要 Sweep 曲面通常用沿脊线的局部活动标架来刻画,但是活动标架的构造在很大程度上由脊线的几何性质决定。因此提出:构造 Sweep 曲面是否一定需要用活动标架来确定截线的位置?为解决这个问题,提出了一种投影变换方法,它有两个优点:首先,当脊线是直线段和圆弧时,Sweep 曲面可以精确表示;第二,Sweep 曲面可以直接用投影变换方法来构造,从而可以避免使用活动标架,进而可以不必考虑脊线的连续性对 Sweep 曲面形状的影响。另外,曲面的误差控制可以通过对脊线的 offset 的误差控制来实现。通过实例验证了所提算法的稳定性和有效性。

关键词 Sweep 曲面 投影变换 活动标架 逼近 几何造型 CAGD

中图分类号: TP391.72 TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2002)02-0150-05

The Construction of Projected-Based Sweep Surface

WANG Guo-ping^{1),2)}, WU Xue-li³⁾, LING Li-xing⁴⁾, DONG Shi-hai^{1),2)}

¹⁾(Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

²⁾Dept. of Computer Science and Technology, Peking University, Beijing 100871)

³⁾(College of Electric and information, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050054)

⁴⁾(Equipment office, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050054)

Abstract The Sweep surface is usually described by using the Local moving Frame along the spine. But the construction of the moving frame is strongly limited by the properties of spine. A problem is arisen: can we describe the Sweep surface to avoid using the moving frame? In this paper, a projected-based approach is proposed which possesses two advantages: Firstly, the Sweep surface can be presented exactly if spine is line segment or arc curve. Secondly, the Sweep surface can be directly described by projected transform so we can avoid using the local moving frame, then the limitation of continuity of spine for the local moving frame is not necessary. On the other hand, the error control can be simplified to the error estimating of the offset of the spine. Three types of spine, such as line segment, arc curve and NURBS curve, are considered with different methods in the projection algorithm. Furthermore, 3D NURBS offset approximation algorithm is presented for 3D NURBS curve, and the projection algorithm of the sweep surface is introduced. Finally, the robustness and efficiency of the algorithm is verified by a lot of examples.

Keywords Sweep surface, Project transform, Moving frame, Approximation, Geometric modeling, CAGD

0 引言

Sweeping 操作在刻画复杂形状的曲面和实体的几何造型系统中具有很强的造型功能。Sweep 曲面可

以用截线、脊线以及截线沿脊线的运动方式来确定。由于这种造型方法只需指定运动对象及其运动轨迹,方法简洁、高效,因此许多商用造型系统都有这种造型功能。Sweep 曲面通常可用以下式子来表示

$$S(u, v) = r(u) + c_1(u, v)N(u) + c_2(u, v)B(u) \quad (1)$$

基金项目:国家自然科学基金重点项目(60033020);教育部高等学校骨干教师基金项目

收稿日期: 2000-12-13; **改回日期:** 2001-06-14

其中, $r(u)$ 是脊线, $c_1(u, v), c_2(u, v)$ 为平面截线, 其中截线与参数 u, v 有关, 说明它可以沿脊线形变或扭转, 若截线与运动无关, 则上述 $c_1(u, v) = c_1(v), c_2(u, v) = c_2(v)$. N, B 是脊线的活动标架上的两个单位矢量, 与参数 u 有关. 通常, 商用几何造型系统中的曲面或实体常用 NURBS 表示, NURBS 具有很强的几何表达能力, 并已成为一种几何数据描述的工业标准. 但是, 由式(1)可知, 除脊线是直线段和圆弧等少数几种曲线形式外, 一般情况下, Sweep 曲面表示式不是有理的, 因此 Sweep 曲面的 NURBS 表示形式, 只能是一种近似的表示方法, 从而逼近误差, 数值计算的稳定性和效率等逼近问题需要进一步认真考虑. 一般地, 目前现有的 Sweep 曲面逼近构造方法最常用的是 offset 方法^[1,2]和中间截线插值法^[2~4]. 这两种方法和其他方法都有个共同的问题, 即, 如何在脊线曲线上放置局部标架, 并利用局部标架生成 offset 脊线或放置中间截线. 目前常用的有 Frenet 标架^[1,5,6], 最小旋转标架^[5,6]以及广义平移标架^[4]3 种标架法. 但采用这些标架有一个基本的困难, 就是局部标架受到脊线的连续性限制. 而广义平移标架受脊线的连续性限制较小, 但在脊线的 G^0 连续点处以及在脊线的拐点等处, 标架不易确定或者由此所生成的曲面形状可能不符合要求. 另外, 采用局部标架法生成 Sweep 曲面还需要计算脊线上的一系列局部标架, 需要较多的矩阵计算, 从而影响了计算效率. 那么, 是否可以避开计算局部标架, 而寻找一种更简洁, 更快速的 Sweep 曲面构造方法呢? 在此引入了一种基于投影变换的 Sweep 曲面构造法. 这种方法避开了局部标架, 而且可以不用中间截线的插值, 从而简化了计算, 又大大放宽了对脊线的各种限制, 拓宽了用户的设计范围, 使 Sweep 曲面更适应工程设计要求.

1 投影变换

设平面 s 的表示为 $AX + BY + CZ + D = 0$, 它的法向量为 n , 平面外一点 $P(x, y, z)$ 沿投影方向 $P_r(x_r, y_r, z_r)$ 在 s 上的投影点记为 $Q(x_0, y_0, z_0)$. 又设函数 $F(x, y, z) = AX + BY + CZ + D$, 则点 $P(x, y, z)$ 到 s 的距离为 $d = F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$, 设 n 与 P_r 夹角为 α , 则有 $\cos\alpha = \frac{n \cdot P_r}{|n| \cdot |P_r|}$, 从而点 P 与 Q 之间的投影长度为 $l = d / \cos\alpha$. 因此投影点 $Q(x_0, y_0, z_0)$ 可表示为

$$Q = P - l \cdot P_r, \text{ 即}$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (x, y, z) - l(x_r, y_r, z_r)$$

这就是平面外一点 P 沿方向 P_r 在平面 s 上投影点的坐标表示, 如图 1 所示.

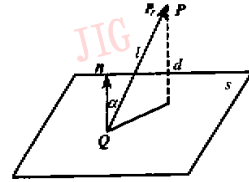


图 1 P 与其投影点 Q 的关系

2 投影算法

设截线表示成 p 阶 NURBS 曲线

$$c(v) = \sum_{i=0}^n P_i^w B_{i,p}(v) \quad (2)$$

其中, $P_i^w = w_i(P_i, 1)$ 是控制顶点 P_i 的齐次坐标表示, w_i 是对应于 P_i 的权因子, v 是曲线的参数, $B_{i,p}(v)$ 是 B 样条基函数, 它由节点矢量 $V = \{v_0, \dots, v_{n+p}\}$ 决定. 同样脊线可设置为 q 阶 NURBS 曲线. 本文假设截线和脊线均为 NURBS 曲线, 并做如下定义:

(1) 投影平面或投影面 对于脊线曲线上的控制顶点列 $\{Q_i\}$, 角平分矢量为 $T_i = \frac{Q_{i-1} - Q_i}{|Q_{i-1} - Q_i|} + \frac{Q_{i+1} - Q_i}{|Q_{i+1} - Q_i|}$, 在 Q_i 点处的控制多边形的法向量为 $R_i = (Q_{i-1} - Q_i) \times (Q_{i+1} - Q_i)$, 则投影平面就是既过 Q_i 点同时又过 T_i, R_i 两矢量的平面, 如图 2 所示. 在控制多边形的起始端点处, 若脊线是开的, 则投影平面与 $Q_0 Q_1$ 垂直; 若脊线是组合曲线, 则投影平面的求法按组合的控制多边形计算.

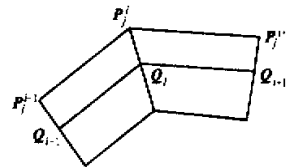


图 2 沿直线段的投影

(2) 投影脊线 脊线的控制多边形称为脊线的投影脊线, 用于建立投影平面. 当脊线是直线段时, 投影脊线与脊线相同.

(3) 初始控制顶点 在脊线的起始点处构造投影

平面,把初始截线上的控制顶点投影到投影平面上,这些投影点都称为初始控制顶点,若初始截线所在的平面与脊线起始端点的切向垂直,也即与投影平面平行,则初始截线的控制顶点可作为截线的初始控制顶点。

下面按照脊线的类型来讨论投影算法。

2.1 直线段情形

若脊线是直线段,则 Sweep 曲面就是直纹面,它的 NURBS 形式的控制顶点和权因子可直接由初始控制顶点的投影得到,投影方向为直线段方向。对于脊线是由直线段连接而成情形,其投影面取在直线段的角平分面。投影控制顶点就是 Sweep 曲面的控制顶点,相应的权因子与截线上 NURBS 表示的相应的权因子相同,见图 2。

2.2 圆弧情形

当脊线是圆弧时,Sweep 曲面可以用 NURBS 精确表示。由于圆弧的 offset 仍是圆弧,NURBS 圆弧的控制边和 NURBS offset 圆弧的控制边是平行的,且两平行边之间的距离即为 offset 距离,因此 Sweep 曲面的控制顶点和权因子可由下述方法计算得到:

把圆弧的控制多边形作为 Sweep 曲面上投影脊线,则圆弧的控制顶点 Q_i 处的截线的投影控制点列 $\{P_i^j\}_{j=0}^m$ 可通过 Q_{i-1} 处的控制顶点列 $\{P_{i-1}^j\}_{j=0}^m$ 投影得到,如图 2 所示。这些投影点即为 Sweep 曲面的控制顶点, P_i^j 处相应的权因子 w_{ij} 为 $w_i^j w_j^i$ (w_j^i 为圆弧的控制顶点所对应的权因子)。

2.3 NURBS 曲线情形

当脊线是 NURBS 曲线时,一般而言,Sweep 曲面不是有理的,设脊线是 $r(u)$,截线是 $c(v)$,其中 u, v 分别是脊线和截线的参数。设截线的定位标架为 $M(u)$,对任意的参数 u ,考察截线在 Sweep 的运动 $T(u)$ 下的形式

$$\begin{aligned}
 S(u, v) &= r(u) + M(u)c(v) = T(u)(c(v)) \\
 &= T(u) \left(\sum_{i=0}^n P_i^c B_{i,\rho}(v) \right) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i^c T(P_i) B_{i,\rho}(v)}{\sum_{i=0}^n w_i^c B_{i,\rho}(v)} \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^n w_i^c A_i(u) B_{i,\rho}(v)}{\sum_{i=0}^n w_i^c B_{i,\rho}(v)} \tag{3}
 \end{aligned}$$

其中, $A_i(u)$ 是控制顶点 P_i 运动生成的曲线

$$\begin{aligned}
 A_i(u) &= T(u)(P_i) = r(u) + M(u)(P_i) \\
 &= \sum_{j=0}^m Q_j^r B_{j,q}(u) + M(u)P_i \tag{4}
 \end{aligned}$$

它就是 $r(u)$ 的 offset 曲线,其中的 offset 方向和 offset 距离由活动标架 $M(u)$ 上的原点和控制顶点 P_i 的相对位置得到。假设 $A_i(u)$ 的 offset 曲线 $A_i^{\rho}(u)$ 可以由 q 阶 NURBS 曲线逼近得到

$$A_i^{\rho}(u) = \frac{\sum_{j=0}^m w_j^i E_{ij} B_{j,q}(u)}{\sum_{j=0}^m w_j^i B_{j,q}(u)} \tag{5}$$

式中, E_{ij} 为 $A_i^{\rho}(u)$ 的第 j 个控制顶点,则逼近的 Sweep 曲面 $S_0(u, v)$ 为

$$\begin{aligned}
 S_0(u, v) &= \frac{\sum_{i=0}^n w_i^c \frac{\sum_{j=0}^m w_j^i E_{ij} B_{j,q}(u) B_{i,\rho}(v)}{\sum_{j=0}^m w_j^i B_{j,q}(u)}}{\sum_{i=0}^n w_i^c B_{i,\rho}(v)} \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} E_{ij} B_{j,q}(u) B_{i,\rho}(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_{j,q}(u) B_{i,\rho}(v)} \tag{6}
 \end{aligned}$$

其中,已记 $w_{ij} = w_i^j w_j^i$ 。从式 (3) 和式 (6) 可知, $S_0(u, v) = S(u, v)$ 当且仅当 $A_i^{\rho}(u) = A_i(u)$ 。对于脊线是直线段和圆弧等少数几种曲线情形,上述结论成立,但对于一般的 NURBS 曲线,则不真。假设脊线所有方向上的 offset 曲线式 (5) 有最大的逼近误差界 ϵ ,即,对于任意的 $i, |A_i^{\rho}(u) - A_i(u)| < \epsilon$,则逼近曲面的逼近误差界不会超过 ϵ 。事实上

$$\begin{aligned}
 |S(u, v) - S_0(u, v)| &= \frac{\left| \sum_{i=0}^n w_i^c (A_i(u) - A_i^{\rho}(u)) B_{i,\rho}(v) \right|}{\sum_{i=0}^n w_i^c B_{i,\rho}(v)} \\
 &\leq \frac{\sum_{i=0}^n w_i^c |A_i(u) - A_i^{\rho}(u)| B_{i,\rho}(v)}{\sum_{i=0}^n w_i^c B_{i,\rho}(v)} \\
 &< \frac{\sum_{i=0}^n w_i^c \epsilon B_{i,\rho}(v)}{\sum_{i=0}^n w_i^c B_{i,\rho}(v)} = \epsilon
 \end{aligned}$$

因此,Sweep 曲面的 NURBS 逼近可简化为脊线的 offset 的 NURBS 逼近问题,从式 (6) 可知, Sweep 曲面的控制顶点 $\{E_{ij}\}$ 就是脊线沿某一方向的 offset 曲线的控制顶点,Sweep 曲面上相应的权因子就是截线和脊线上相应权因子的乘积。

下面考虑脊线在标架 $M(u)$ 下的 NURBS offset

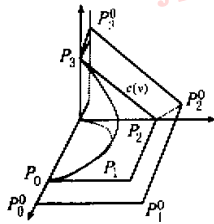


图 3 曲线的控制多边形及其 offset

曲线的求法。一种方法是脊线 $r(u)$ 沿标架 $M(u)$ 计算 m 个 offset 点, 再通过解线性方程组, 反求它的 offset 曲线的控制顶点, 由此得到 Sweep 曲面的控制顶点, 但这种方法不仅依赖于标架 $M(u)$, 而且当初始截线的 NURBS 表示有 n 个控制顶点时, 需要解 n 个 m 阶线性方程组。另一种方法是利用文献 [2] 中的求 offset 曲线的方法, 平面 B 样条的 offset 方法可通过其控制多边形的 offset 逼近得到。这里把这一方法推广到具有任意 offset 方向的空间 NURBS 曲线情形。

由于文献 [2] 表示的是平面曲线情形, 所以不存在 offset 方向的选取问题, 但对于空间曲线, 采用不同的 offset 方向, 得到的 offset 曲线具有不同的空间形状。这里采用投影变换法, 把脊线的控制多边形作为投影脊线, 在投影脊线的角平分线处, 生成各投影平面, 然后再把初始控制顶点沿与投影脊线平行的方向通过投影变换在下一邻接投影平面上, 生成相应的投影控制点, 由此得到的控制顶点序列即为 Sweep 曲面的控制顶点序列, 这样就避免了局部标架的计算。下面给出空间 NURBS 曲线的 NURBS offset 曲线生成算法:

(1) 投影控制顶点的生成 把脊线的控制多边形作为投影脊线, 计算各线段端点处的投影面, 利用第 1 节的投影变换方法, 把初始点沿投影脊线方向依次投影到下一个邻接投影平面上, 生成脊线的 offset 曲线的控制顶点。相应控制顶点处的权因子与脊线上相应位置上控制顶点所对应的权因子相同;

(2) 误差估计与曲线分割 构造 NURBS offset 曲线, 其中的控制顶点由上一步骤生成, 相应的权因子和节点矢量不变。选择脊线上 m 个样本点, 检测脊线与其 offset 曲线之间的逼近误差。若在某一样本点处误差超界, 则在相应的参数点处作插入节点处理, 依次检查 m 个样本点。作插入节点后返回第 1 步重新计算投影控制顶点; 若所有样本点

处的逼近误差都在误差界范围内, 则转到下一步;

(3) 输出 NURBS offset 曲线。

注 1 由 de Boor 离散算法可知, 控制多边形是原曲线的逼近曲线, 当插入节点足够多时, 控制多边形与曲线之间的距离也就足够近。因此上面用投影法生成 offset 曲线的控制顶点算法可以在有限步内结束, 算法效率依赖于曲线的形状和逼近精度。

注 2 在文献 [7] 中, 最小旋转标架沿曲线上的点的切向具有最小的转角, 由上面的算法分析可知, 投影控制顶点沿脊线曲线也具有旋转极小性质, 因此两种方法生成的曲面形状类似, 但这里所提出的算法比文献 [7] 所给出的算法要简洁得多。

3 基于投影变换的 Sweep 曲面生成算法

利用上一节的 NURBS offset 曲线的投影生成算法, Sweep 曲面的构造算法可描述如下:

(1) 生成初始控制点, 在投影脊线的端点处, 建立投影平面, 并计算截线的各初始控制顶点的 offset 距离。适当选取用于曲面误差控制检查的截线上的初始控制顶点及其相应的 NURBS offset 曲线, 这里的适当选取应包含具有最大 offset 距离和截线上具有适当间隔的初始控制顶点。

(2) 用投影法由截线上所有的初始控制顶点生成相应的 NURBS offset 曲线。

(3) 若脊线是圆弧或直线段, 转至第 4 步, 否则计算从第 1 步中适当选取的 NURBS offset 曲线在样本点处的逼近误差, 若对于其中之一 offset 曲线, 某一样本点处逼近误差超界, 则对原 NURBS 脊线作插入节点操作, 转至第 1 步; 若所有适当选取的 NURBS offset 曲线的所有样本点的逼近误差均满足误差要求, 则转至第 4 步;

(4) 由所有 NURBS offset 曲线的控制顶点构成 Sweep 曲面的控制顶点阵, 相应的权因子是截线上相应的控制顶点所对应的权因子和 NURBS offset 曲线上相应的权因子的乘积, 节点矢量分别与截线和脊线在插入节点后的节点矢量相同。

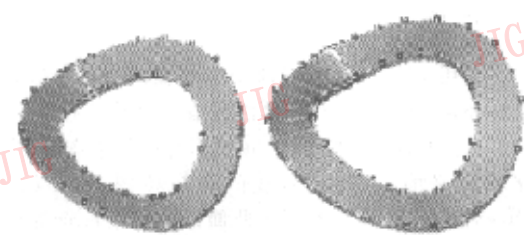
4 例子和比较

在许多造型系统中, 插值中间截线法是一种常用的 Sweep 曲面构造方法^[1,3], 这一算法稳定可靠。

但通过与本文提出的投影算法相比较可知,投影算法生成的 Sweep 曲面更光顺,速度更快,这一点对于商品化 CAD 造型系统尤为重要.下面各例中给定的逼近误差均为 10^{-4} .

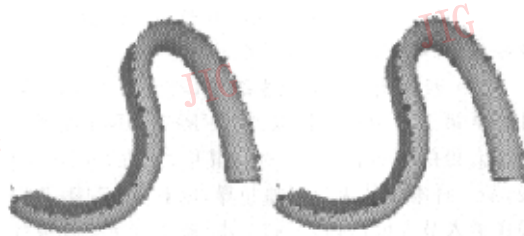
例 1 用 Sweep 方法构造垫片,截线是矩形,脊线是空间 NURBS 曲线.用投影变换方法,构造时间是 0.196s, Sweep 曲面的控制顶点数为 33×8 ,如图 4(a)所示,但是用插值方法,构造时间为 0.733s,控制顶点数为 35×8 ,如图 4(b)所示.

例 2 截线是圆弧和直线段,脊线是由 34 个控制顶点构成的空间 NURBS 曲线.用投影变换方法,构造时间是 0.272s,曲面的控制顶点数为 41×7 ,如图 5(a);但用截线插值方法生成,构造时间为 1.052s,曲面的控制顶点数为 43×7 ,如图 5(b).



(a) 用投影方法构造的垫片 (b) 用插值方法构造的垫片

图 4



(a) 用投影方法生成的实体 (b) 用插值方法生成的实体

图 5

例 3 截线和脊线都用直线段拼接而成,则用投影变换法简单,效果好,如图 6.



图 6 截线和脊线都是直线段的情形

5 结 论

本文给出了一种基于投影变换的 Sweep 曲面生成方法,通过大量的实实验证,它比其他的 Sweep 曲面生成方法具有如下优点:算法简单易实现;与脊线上的局部标架无关;大大放宽了对脊线连续性的限制;脊线是圆弧或直线段时,可用精确的 NURBS 表示;Sweep 曲面的形状可控性增强.

更重要的是,它比插值中间截线法生成的曲面更光顺,算法速度更快.但是,对于曲面有形变和扭转时,此时的投影方法可能较为复杂,但投影法也有可能推广到这种情形,这一点有待进一步研究.

参 考 文 献

- 1 Bloomenthal M *et al.* Approximation of sweep surfaces by tensor product NURBS[A]. Curves and surfaces in Computer Vision and Graphics II[C], 1991:132~144.
- 2 Tiller W *et al.* Offsets of two-dimensional profiles[J]. IEEE CG/A, 1984,4(5):36~46.
- 3 Bronsvort W F *et al.* A method for converting the surface of a generalized cylinder into a B-spline surface[J]. Comput. & Graphics, 1992,16(2):175~178.
- 4 汪国平,吴学礼,孙家广. Sweep 曲面的 NURBS 逼近[J]. 计算机学报,1998,21(9):845~849.
- 5 Coquillart S. A control-point-based sweeping technique[J]. IEEE CG/A, 1987,7(6):36~45.
- 6 Guggenheimer H. Computing frames along a trajectory[J]. CAGD, 1989,6:77~78.
- 7 Klok F. Two moving coordinate frames for sweeping along 3D trajectory[J]. CAGD, 1986,3:217~229.



汪国平 博士,副教授,参加或负责完成国家级项目近十项.现主要研究方向为虚拟现实、计算机图形学和多媒体等.发表论文 30 余篇,其中多篇被 SCI 和 EI 检索.

吴学礼 教授,河北科技大学电气信息学院副院长,华中科技大学控制系博士生,研究方向为智能控制理论及应用、计算机控制与管理一体化.发表论文近 40 篇.

林立新 工程师,研究方向为计算机控制与管理一体化.发表论文多篇.



董士海 教授,博士生导师,北京大学计算机系多媒体与人机交互研究室主任.现主要研究方向为多通道人机界面、虚拟现实和多媒体等.发表论文百余篇,出版专著 4 部.